Cntgcd Soluție

Autor: Mihai Calancea

Fie F(N, D) = numărul de perechi (x, y) cu 1 <= x, y <= N care au cel mai mare divizor comun egal cu D.

În primul rând, observăm că F(N, D) = F(N / D, 1) (Obsv. 1).

Astfel, avem nevoie de o metodă eficientă de calcul a numarului de perechi de numere prime între ele cu valori mai mici sau egale cu N. O primă soluție, în valoare de 40 de puncte, constă în folosirea ciurului lui Eratosthene pentru a calcula funcția phi(X) = numărul de numere mai mici decat X prime cu X. Aceasta soluție are complexitatea O(N log log N). Există însa o metodă mai rapidă de a calcula F(N , 1):

Vom scădea din numărul total de perechi posibile (x, y) pe cele care au cel mai mare divizor comun mai mare decat 1.

F(N, 1) = N ^ 2 - (F(N, 2) + F(N, 3) + F(N, 4) + .. F(N , N))

Folosind din nou observația 1 putem rescrie formula astfel:

F(N, 1) = N ^ 2 - (F(N / 2, 1) + F(N / 3, 1) + F(N / 4, 1) + .. F(N / N, 1))

Putem apela recursiv valorile F(X, 1) necesare. Pentru a obține o soluție care se încadrează în timp ne vom folosi de faptul că numărul de valori distincte ale lui X pentru care vom apela funcția este în realitate O(sqrt(N)). Mai exact, împarțind numărul N la toate numerele X de la 1 la N, se obțin maximum 2 * sqrt(N) câturi distincte. Astfel, pentru fiecare cât vom calcula intervalul în care acesta rămane constant și vom inmulți apelul corespunzător cu lungimea intervalului. Vom folosi și memoizarea apelurilor pentru a îmbunataţi soluția. O ultimă îmbunatățire care garantează punctajul maxim este memoizarea valorilor mai mici decât un milion folosind soluția de 40 de puncte, pentru a reduce nivelul recursiei în apelurile funcției F.

Proba de baraj

Complexitatea soluției este $O(N ^ (2 / 3))$ însă demonstrația nu mai este trivială :).