Problema - charlie

Autor: prof. Eugen Nodea,
Colegiul Național „Tudor Vladimirescu”, Târgu Jiu

Punctul a) *25 puncte*

- printr-o parcurgere liniară a șirului se determină lungimea maximă a unei secvențe alternante de litere

Punctul b) *75 puncte*

Este o problema de Greedy + stiva (**st**)

Rezolvarea se bazează pe afirmaţia că ordinea în care se efectuează operaţiile de eliminare a literelor nu influenţează rezultatul final (vezi demonstrația).

Fie șirul de litere `s = (s[i])`$_{i=0,1,...,n-1}$, unde `n=strlen(s)`

```
push (st, s[0])
push (st, s[1])
┌pentru i = 2,n-1 execută
│    ┌cat timp (s[i] > st[vf] && st[vf] < st[vf-1]) execută
│    │    pop (st)    //eliminam din stiva st[vf]
│    └■
│ push (st,s[i])
└■
```

Complexitatea : **O(n)**

charlie – Rezolvare teoretică (prof. Stelian Ciurea)

Rezolvarea problemei se bazează pe afirmaţia că ordinea în care se efectuează operaţiile de eliminare a unui *minim local* nu influenţează rezultatul final. Aceasta deoarece în momentul în care un element a_i care este minim local urmează să fie eliminat, vecinii lui din poziţiile a_{i-1} şi a_{i+1} sunt unic determinaţi, indiferent ce transformării ale şirului au avut loc mai înainte.

Dar înainte de a demonstra această afirmaţie, este bine să observăm următoarele:

1) dacă în şir există paliere de două sau mai multe elemente (unde palier = subşir de elemente egale aflate în poziţii consecutive), elementele acestor paliere nu vor putea fi eliminate. Justificare afirmaţiei este imediată: fie $a_i = a_{i+1}$; niciunul dintre aceste elemente nu vor putea deveni la un moment dat minim local. Să presupunem prin reducere la absurd că a_i ar putea deveni minim local. Aceasta presupune că la un moment anterior a_{i+1} a fost eliminat şi în locul lui a venit un element mai mare. Ceea ce este fals deoarece a_{i+1} nu putea fi eliminat atâta timp cât în poziţia din stânga lui se află a_i! Raţionamentul este similar pentru a_{i-1}.

2) dacă avem două elemente oarecare a_i şi a_j şi $i<j$ (adică a_i se află în stânga lui a_j) şi prin aplicarea unui număr oarecare de eliminări de minime locale din şir, a_i şi a_j au rămas în şir, atunci în continuare $i<j$ (adică a_i se va afla tot în stânga lui a_j) chiar dacă numărul de elemente dintre poziţiile i şi j s-a micşorat, eventual s-a redus la 0. Această afirmaţie este evidentă prin modul în care se efectuează operaţia de eliminare: la efectuarea unei eliminări, un element nu poate avansa spre stânga mai mult de o poziţie. Pentru ca a_j să treacă înaintea lui a_i, ar fi necesar ca la o singură eliminare a_j să avanseze cu două poziţii mai mult decât a_i ceea ce este imposibil.

   Atenţie! Repetăm că această afirmaţie se referă la situaţia în care a_i şi a_j au rămas în şir!

Să trecem acum la justificarea afirmaţiei de la începutul demonstraţiei şi anume că în momentul în care un element a_i care este minim local şi urmează să fie eliminat, vecinii lui din poziţiile a_{i-1} şi a_{i+1} sunt unic determinaţi, indiferent ce transformării ale şirului au avut loc mai înainte. Evident, toată discuţia are rost dacă a_i va putea fi eliminat. Dacă unul dintre vecinii lui este egal cu el, conform afirmaţiei **1**, a_i nu va putea fi eliminat şi deci analiza nu mai are rost!

Se disting următoarele situaţii:

- a_i este minim local, atunci nici a_{i-1} şi nici a_{i+1} nu vor putea fi eliminate înaintea lui a_i deoarece atâta timp cât în şir există a_i, niciunul dintre cele două nu poate fi minim local!

- a_i nu este minim local; atunci cel puţin unul dintre vecinii lui este strict mai mic decât el. Să presupunem că elementul aflat în dreapta lui a_i este mai mic decât a_i: $a_i > a_{i+1}$. Atunci pentru ca a_i să poată fi eliminat este obligatoriu ca în poziţiile `i+2`, `i+3`, ...,`L` (`L` fiind ultima poziţie din şir) să existe cel puţin un element strict mai mare decât a_i. Dacă toate elementele din dreapta lui a_i ar fi mai mici sau egale cu a_i, este evident că el nu va putea deveni minim local!

Să presupunem că sunt mai multe elemente mai mari decât a_i. Fie acestea în poziţiile p_1, `p2`, ..., p_k, cu `p1< p2< ...< pk`. Deci elementul din `p1` este cel mai din stânga dintre acestea şi deci între poziţiile `i+1` şi p_1-1 nu există niciun element mai mare decât a_i. În aceste condiţii, prin aplicarea eliminărilor de minime locale, singurul element mai mare decât a_i care poate să apară în poziţia `i+1` este cel aflat iniţial în p_1 (adică primul element mai mare decât a_i aflat în dreapta lui a_i).

Să presupunem prin reducere la absurd că ar putea să apară un element mai mare decât a_i aflat iniţial într-o poziţie din dreapta lui p_1. Conform afirmaţiei **2**, aceasta nu poate să se întâmple dacă elementul din p_1 a rămas în şir. Deci singura posibilitate ar fi ca elementul din p_1 să fie eliminat. Dar aceasta presupune că el devine minim local la un moment dat (în condiţiile în care ai este încă în şir!), ceea ce este imposibil deoarece conform ipotezei făcute, între poziţiile `i+1` şi p_1-1 nu există niciun element mai mare decât a_i, iar $a_i < ap_1$!

Cazul $a_i > a_{i-1}$ se tratează similar. Cu aceasta considerăm afirmaţia demonstrată.

Din această demonstrație rezultă că dacă un element oarecare a_i va fi eliminat şi iniţial el nu este minim local, atunci în momentul în care devine minim local el va fi încadrat de cele mai apropiate elemente strict mai mari decât el aflate în stânga şi respectiv în dreapta lui.

În concluzie, rezultatul aplicării eliminărilor din şir este unic indiferent de ordinea în care acestea se efectuează, deci orice program care efectuează corect toate eliminările posibile va conduce la rezultatul corect.

Singura problemă este complexitatea algoritmului.