Descrierea soluției – nperechi

prof. Cheșcă Ciprian, Liceul Tehnologic „Costin Nenițescu" Buzău

Varianta 1 ("brut force")

Având în vedere că $0 < x,y < 1$, valoarea maximă a expresiilor $a \cdot x+b \cdot y$ și $c \cdot x+d \cdot y$ este a + b respectiv c + d.

Se poate forma astfel un sistem de 2 ecuații cu necunoscutele x și y de forma $\begin{cases} ax + by = k1 \\ cx + dy = k2 \end{cases}$

în care k1 și k2 parcurg concomitent toate valorile naturale cuprinse între a+b și respectiv c+d.

Se contorizează numai soluțiile cuprinse între 0 și 1.

Soluția are complexitate O((a+b)(c+d)) și obține 15-20 puncte.

Varianta 2(geometrie vectorială și teorema lui Pick)

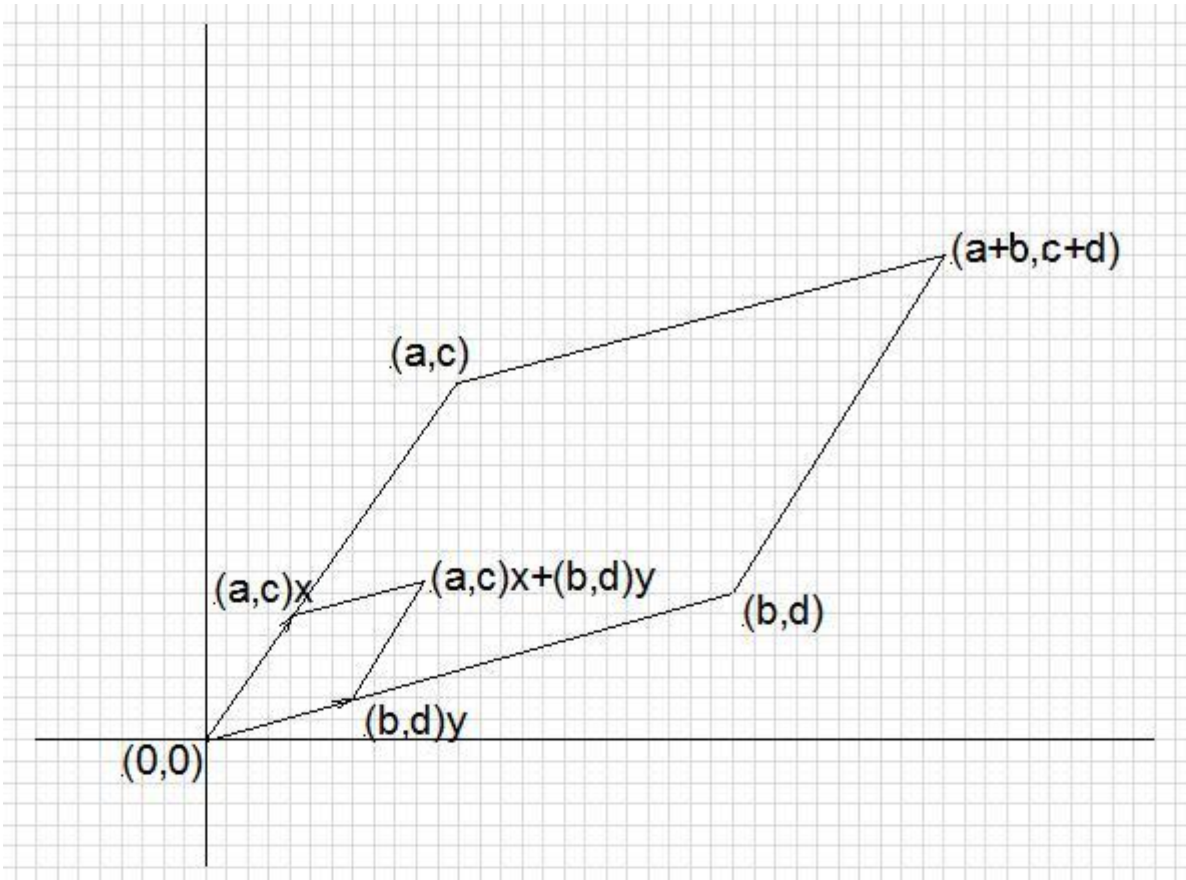
Să privim perechea (ax+by, cx+dy) ca pe un punct din plan.

(ax+by, cx+dy) se mai poate scrie $(a,c) \cdot x + (b,d) \cdot y$.

Condiția $0 < x,y < 1$ se poate interpreta astfel :

(ax+by, cx+dy) reprezintă un punct având coordonatele în interiorul paralelogramului cu vârfurile în punctele (0,0), (a,c), (b,d) și (a+b,c+d), conform figurii de mai jos.

Câte puncte de coordonate naturale există în interiorul paralelogramului atâtea perechi (x,y) de numere reale vor exista.



Se determină așadar aria acestui paralelogram în două moduri diferite:

- Odată, folosind determinanți se obține valoarea |ad − bc|
- A doua oară cu teorema lui Pick care afirmă că A = B + I/2-1, unde B = numărul punctelor de coordonate întregi de pe laturile paralelogramului și I = numărul punctelor de coordonate întregi din interiorul paralelogramului.

Rămâne de aflat câte puncte de coordonate naturale se află pe laturile paralelogramului, mai puțin vârfurile.

Pentru asta avem nevoie de a determina cmmdc(a,c) și cmmdc(b,d).

Egalând cele două expresii se poate determina I.