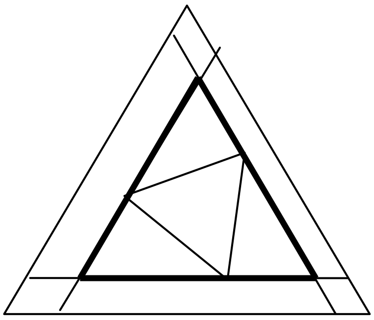
Problema - echilateral

Adrian Panaete,

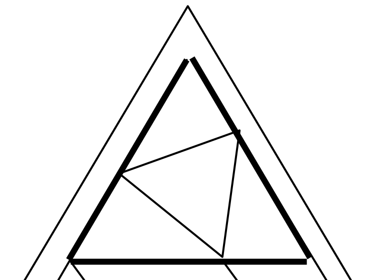
Colegiul Național “A. T. Laurian” Botoșani

Descrierea soluției

Există o observatie esențială legată de numărarea triunghiurilor. Să considerăm un triunghi echilateral T cu vârfuri în nodurile rețelei. Ducem paralele la laturile triunghiului mare prin vârfurile “cel mai de jos”, “cel mai din stânga” și “cel mai din dreapta” obținând un unic triunghi T1 cu laturile paralele la laturile rețelei si asociat triunghiului inițial



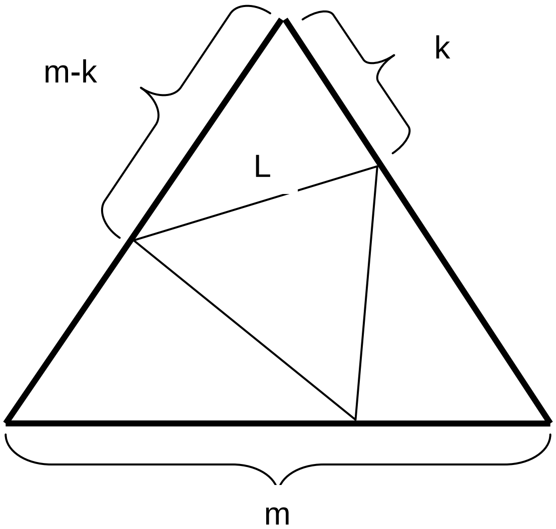
Vom spune în acest caz că T este “înscris” în T1.
Se observă că un triunghi T1 de latură m are exact m triunghiuri înscrise in el.
Pentru fiecare m între 1 și n există câte (n+1-m)(n+2-m)/2 triunghiuri T1 deci pentru a obține numărul total de triunghiuri sumăm numerele m(n+1-n)(n+2-m)/2. Folosind tehnici de sumare a puterilor numerelor asemenea deducem că pentru cazul a=1,b=n soluția este $C_{n+3}^4 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$.
Acest rezultat se poate obține și prin tehnici pur combinatorice astfel:



Considerăm un triunghi și îi asociem 4 numere a,b,c,d, Numerele a și b localizează capătul din dreapta al laturii orizontale a lui T1, c localizează poziția unui varf al lui T pe latura de jos a lui T1 iar d localizează capătul din stânga a laturii orizontale a lui T1. Astfel orice triunghi este unic localizat de 3 numere 0<=a<=b<c<=d<=n deci de numerele 1<=a+1<b+2<c+2<d+3<=n+3. In concluzie numărul triunghiurilor este numărul submulțimilor de 4 elemente dintr-o multime de n+3 . Acest număr este C_{n+3}^4.

Cazul general.

Plecăm de la observația din cazul particular și vom considera triunghiurile de latură m.



Pentru orice k intre 0 și $m-1$ se poate calcula latura unui triunghi inscris cu formula

$$L^2 = k^2 + (m-k)^2 - k(m-k)$$

Dar datorită simetriei (putem schimba k cu $m-k$ și obținem același L) se poate raționa cu k până la $m/2$. Pe noi ne intereseaza pentru câte valori ale lui k se repsectă inegalitatea $a \leq L \leq b$. Dar pentru că L descrește odată cu k este suficient să determinăm cea mai mica valoare a lui k_b pentru care $L \leq b$ și cea mai mare valoare a lui k_a pentru care $L \geq a$.
Complexitatea determinarii acestor două valori determina si timpul final de executie.
Avem urmatoarele variante

1. Căutare secvențiala
2. Cautare binară
3. Determinarea în timp constant.

Deoarece căutarea secvențială este evidentă iar căutarea binară este intuitivă (se compară expersia lui L cu valorile a respectiv b) voi descrie determinarea în timp constant.

O metodă ar fi să folosim faptul că L^2 este funcție de gradul 2 în k deci egalând cu a^2 obținem o valoare reală x aproximav egală cu valoarea k Una dintre aproximările întregi ale lui x este exact valoarea dorită. Analog pentru b.

A doua metodă este plecăm cu valorile k_a=k_a=a pentru cea mai mică valoare a lui $m = a$ (se observă ca pentru $m < a$ avem $L < a$) Actualizăm aceste valori la fiecare crestere a lui m. Această idée functioneaza deoarece odată cu cresterea lui m pentru un k fixat valoarea L va creste : Astfel k_a și k_b pot fi modificate cu cate o unitate pana cand reincadram laturile corespunzatoare optim în intervalul [a, b] .

Este bine de remarcat ca pentru $m < a$ se obtine $L < a$ iar pentru $m > 2b$ se obtine $L > b$ pentru orice k.
Astfel valorile lui m trebuie parcurse doar in intervalul [a , $2b$]