

## Problema 1 – Amici. Soluție oficială.

Autor: stud. Mihai Calancea  
Universitatea Buicurești

Se observă că rețeaua menționată în enunțul problemei poate fi modelată sub forma unui graf neorientat conex. Astfel, la fiecare pas, apar muchii noi între nodurile aflate la distanța 2 în graf iar răspunsul este dat de momentul în care graful devine complet.

Este clar că ultimele noduri legate prin muchie directă vor fi perechile de noduri cu distanța minimă maximă în graful inițial. Distanța maximă dintre două noduri ale unui graf se numește diametrul grafului, motiv pentru care va fi notată în continuare cu  $D$ . Se observă că diametrul se înjumătățește la fiecare pas, iar cu puțină analiză putem trage concluzia că răspunsul problemei este dat de cel mai mic  $K$  pentru care  $2^K \geq D$ . Problema se reduce astfel la calcularea valorii  $D$ . Algoritmul brut implică aplicarea unei parcurgeri în lățime pentru fiecare nod al grafului. Acest algoritm are complexitate  $O(N * M)$  și nu este fezabil având în vedere limitele problemei.

Din păcate, aceasta este și cea mai bună complexitate pe care o poate lua un algoritm determinist de găsire a diametrului unui graf, găsirea unei soluții mai eficiente ramanand o problema deschisa. Totusi, problema de fata se poate aproxima cu eroare de o unitate in timp liniar. Fie  $X$  prima zi in care un nod  $A$  are muchie directa cu toate celelalte noduri. Este evident ca dupa acest punct, procesul mai poate dura o singur[ zi in plus, deoarece orice pereche de noduri neadiacente va folosi nodul  $A$  pentru a adauga muchiile necesare. Răspunsul real al problemei este deci fie  $X$ , fie  $X + 1$ . Aceasta solutie implica aplicarea unei parcurgeri in lățime pentru un singur nod al grafului (oricare dintre ele) si se traduce prin faptul că pentru orice nod  $X$  din graf, distanța maximă a unui nod  $Y$  fata de  $X$  este cel puțin jumătate din diametrul real al grafului. Sa demonstrăm acest lucru. Fie  $Z$  si  $T$  două noduri care determină diametrul real al grafului,  $D$  si fie  $d$  distanța dintre  $X$  si  $Y$ . Stim sigur că distanțele de la  $X$  la  $Z$  respectiv de la  $X$  la  $T$  sunt  $\leq d$  (altfel, unul din aceste două noduri ar fi înlocuit nodul  $Y$ ). Astfel, există sigur un drum între  $Z$  si  $T$  de lungime  $\leq 2 * d$ , deci  $D$  este la rândul său mai mic sau egal cu  $2 * d$ .

Menționăm că fișierele de ieșire ale comisiei conțin, evident, răspunsul exact.