Problema 2- Bemo

Autor: Marius Laurențiu Stroe
Universitatea București

Soluție 40p

Inițial, orice drum poate include orice număr din matrice. Dacă nu alegem primul drum care să îl conțină pe `1`, atunci va exista un alt drum care să îl conțină. Considerăm astfel că `1` se găsește pe poziția (i_1, j_1). Atunci, următorul element trebuie să se găsească într-o poziție `(i, j)` ce respectă condițiile:

- $1 \le i \le i_1$ și $1 \le j \le j_1$;
- $i_1 \le i \le R$ și $j_1 \le j \le C$;

Această soluție folosește metoda Divide et Impera, iar fiecare pas constă în a găsi minimul într-un dreptunghi care să descompună problema inițială. Soluțiile vor obține `40p` sau `50p`, depinzând de cât de bine sunt implementate.

Complexitate: $O(R^2C^2)$

Soluție 70p

Folosind ideea anterioară, de a căuta minimul în fiecare subproblemă, observăm că drumul, după ce am găsit `K` astfel de numere, îndeplinește proprietatea:

- $i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_K$;
- $j_1 \le j_2 \le \ldots \le j_K$;

Unde (i_1, j_1) este poziția primului număr etc.

Acum va trebui să introducem al `K+1`-lea număr dintre cele `R*C`. Al `K+1`-lea număr trebuie să fie cel mai mic număr posibil și să se încadreze în șirul anterior. Adică, va trebui să existe un indice `p` astfel încât $i_p \le i_{K+1} \le i_{p+1}$ și $j_p \le j_{K+1} \le j_{p+1}$. Astfel, șirul anterior se va extinde.

Inițial, numerele de pe pozițiile `(1, 1)` și `(R, C)` trebuie să facă parte din cel mai bun drum, conform definiției unui drum bun. Numerele vor fi considerate în ordine crescătoare, iar la fiecare pas se va căuta binar poziția sa în șirul anterior.

Complexitate: $O(RC \log(R+C))$.

Soluție 100p

La fel ca în soluția de `40p`, vom împărți problema inițială în două subprobleme în funcție de minimul din dreptunghiul acelei subprobleme. Presupunem că o subproblemă are dreptunghiul (i_l, j_l, i_r, j_r) iar minimul din acest dreptunghi se găsește pe poziția (i_m, j_m). Atunci, în loc să căutăm minimul în valorile de care avem nevoie, marcăm elementele de care nu avem nevoie. Astfel, vom marca toate numerele din subdreptunghiurile $(i_l, j_{m+1}, i_{m-1}, j_r)$, respectiv $(i_{m+1}, j_l, i_r, j_{m-1})$ ca fiind inutile.

Dacă vom considera toate numerele în ordine crescătoare, atunci la fiecare pas e posibil ca unul din dreptunghiuri să fie împărțit în alte două subdreptunghiuri, iar numerele nefolositoare să fie marcate.

Observăm că fiecare număr va fi marcat ca nefolositor cel mult o dată. Dacă nu este marcat ca nefolositor, atunci va fi un număr din drumul bun.

Complexitate: `O(RC)`.

Soluție 100p

Ca și în soluția anterioară vom încerca să diferențiem pe parcursul soluției elementele utile și cele inutile.

Se observă ușor că la orice moment de timp, pe fiecare coloană, elementele utile reprezintă un interval compact. Menținem acest interval pentru fiecare coloană, iar pentru a verifica dacă un element este util verificăm doar dacă se încadrează în intervalul coloanei sale. După ce l-am fixat, pe toate coloanele anterioare, intervalele cu elemente utile se termină cel mult pe același rând cu elementul fixat. Iteram prin ele și marcam asta. Pe coloanele următoare intervalele cu elemente utile încep cel mai devreme pe același rând cu elementul fixat și facem la fel.

Întrucât fixăm `R + C - 1` elemente in total complexitatea este `O(R (R + C))`.