Problema 3: Xnumere - soluție

Stud. Dragoş Alin Rotaru – Universitatea Bucureşti
Stud. Bogdan Cristian Tătăroiu – University of Cambridge

1. **10 p - O(** K^N **)**

Se generează toate soluțiile cu Backtracking.

2. **30p – O(** $N*K$ **)**

Se observă recurența următoare : $D[i][j]$ – numărul de şiruri de lungime `i` cu fix `j` numere distincte.

$D[i][j]=D[i-1][j]*j+D[i-1][j-1]*(K-j+1)$. În primul caz adăugăm la pasul i un element deja în mulțimea `{1..j}` iar în al 2-lea adăugăm un element care se află în mulțimea `{j+1...K}`. Starea inițială este $D[0][0]=1$. Răspunsul se află în $D[N][X]$.

3. **60p – O(** $\log(N) * K^3$ **)**

Notăm $R(i)=(D[i][0], D[i][1], \ldots. D[i][K])$.

Optimizând soluția de 30 de puncte obținem o matrice `M` de dimensiune `K*K` , in care $M[i][i]=i$ $i=1, K$ si $M[j][j-1]$ = `K-j+1`, oricare $j=2, K$. Dacă inmulțim matricea M cu vectorul coloana `R(0)` obținem `R(1)`. Utilizând inducția, `R(i)` = M^N *`R(i–1)`. Din M^N * `R(0)` vom obține `R(N)`. Pe linia `X` a vectorului `R` vom obține răspunsul căutat . Vom calcula M^N folosind exponentierea rapidă de matrice ($M^{(N/2)}$ = $M^{(N/2)}$ * $M^{(N/2)}$ cand N e par . M^N = $M^{(N/2)}$ * $M^{(N/2)}$ * M, pentru N impar)

4. **85p – O(** $X^2+X\log(N)$ **)**

Fie **d[i]** = numărul de şir-uri de lungime **N** formate din fix **i** numere distincte cu valori între **1** şi **i**. Pentru a calcula **d[i]**, vom considera toate şirurile de lungime **N** cu valori între **1** şi **i** (în număr de $\mathbf{i^N}$) **şi** vom elimina din acestea pe cele care nu sunt formate din fix **i** numere distincte. Pentru orice **j < i**, ştim **d[j]** = numărul de şiruri de lungime **N** cu fix **j** numere distincte cu valori între **1** şi **j** şi putem astfel calcula numărul de şiruri de lungime **N** cu fix **j** numere distincte cu valori între **1** şi **i** ca fiind **d[j] * comb[i][j]**, unde **comb[i][j]** reprezintă numărul de moduri de a alege **j** valori din **i** variante posibile. Ca urmare a acestor observații obținem relația de recurență:

$$d[i]=i^N-\sum_{j=1}^{i-1} d[j]\cdot comb[i][j]$$

Avem **comb[K][X]** moduri de a alege **X** valori distincte din cele **K** şi **d[X]** şiruri de lungime **N** cu **X** valori distincte între **1** şi **X**, deci numărul total de şiruri de lungime **N** cu **X** valori distincte între **1** şi **K** va fi determinat de numărul de moduri de a alege **X** numere distincte din cele **K** înmulțit cu **d[X]:**

d[X] * comb[K][X].

5. **100p – O(** $X\log(N)$ **)**

După analiza atentă a problemei, se observă că rezultatul este de fapt **S[N, X] * A[K, X]**, unde **S[N, X]** sunt numerele lui Stirling de speța a doua (în câte moduri putem împărți **N** obiecte în **X** clase) şi **A[K,**

X] sunt aranjamente de **K** luate câte **X** (în câte moduri putem alege **X** obiecte din **K** în condițiile în care ordinea elementelor alese contează). Să presupunem că avem valorile și ordinea celor **X** numere fixate: **v[1], v[2], ..., v[X]**. **S[N, X]** reprezintă numărul de moduri de a împărți cele **N** poziții în **X** seturi distincte, fiecare set corespunzând unuia din cele **X** numere. Daca o poziție face parte din set-ul **i**, atunci valoarea de pe poziția respectivă va fi **v[i]**. Numărul de moduri de a fixa șirul de valori **v[1], v[2], ..., v[X]** este dat de **A[K, X].**

S[N, X] se poate calcula în timp **O(X log N)** folosind principiul includerii și excluderii.

$$S[N, X] = \frac{1}{X!} \cdot \sum_{j=1}^{X} (-1)^{X-j} \cdot comb[X][j] \cdot j^N$$

Demonstrația este simplă, dar nu trivială. O schiță a uneia poate fi gasită în [1], sub capitolele Onto functions și Stirling Numbers of the Second Kind.

comb[X][j] se poate calcula în timp logaritmic din **comb[X][j – 1]** utilizând inverse modulare.

A[K, X] se poate calcula în **O(X)** ca produs de **(K – X + 1) * ... * K.**

[1] http://www.rhitt.com/courses/367/sp03/docs/inclusion_exclusion.pdf